التكامل بالتعويض

$$\int (\text{٣س} - ١)^{٨} \cdot \text{ءس}$$

الخطوة الأولى: نفرض أن ما بداخل القوس يساوي أي رمز ع ، ل ، هـ ....، تجنب الرمز المعطى في التكامل، ثم نجد مشتقته، ونجد قيمة ءس بدلالة الرمز الذي فرضته، أي أن:

⟸ نفرض أن $\text{ع} = \text{٣س} - ١ \Longleftarrow \dfrac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٣$

$\Longleftarrow \text{ءس} = \dfrac{\text{ءع}}{٣}$.

الخطوة الثانية: نعوض في الدالة الأصلية بدل الرمز الذي فرضناه، وبدل قيمة ءس ثم نجري عملية التكامل، أي أن:

$$\int (\text{٣س} - ١)^{٨} \cdot \text{ءس} = \int \text{ع}^{٨} \cdot \frac{\text{ءع}}{٣}$$

$$= \frac{١}{٣} \int \text{ع}^{٨} \cdot \text{ءع}$$

$$\Longleftarrow \int (\text{٣س} - ١)^{٨} \cdot \text{ءس} = \frac{١}{٣} \times \frac{\text{ع}^{٩}}{٩} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٢٧} \text{ع}^{٩} + \text{ث}$$

الخطوة الثالثة : نعوض بعد عملية التكامل بدل الرمز الذي فرضناه بقيمته أي أن :

$$\int (\text{٣س} - ١)^{٨} \cdot \text{ءس} = \frac{١}{٢٧} (\text{٣س} - ١)^{٩} + \text{ث}$$

$$\text{د(س)} = (\text{٣س}^{٢} + ٥)^{٦} \text{س} \cdot \text{ءس}$$

هذا النوع

من الأسئلة يفضل استخدام استبدال المتغير بمتغير آخر يتم من خلاله تبسيط المسألة فنضع المقدار داخل القوس $\text{٣س}^{٢} + ٥ = \text{ع}$ ونشتق الطرفين لنجد قيمة ءس بالنسبة إلى ءع :

$\text{٦س} \cdot \text{ءس} = \text{ءع}$ ومنها $\text{ءس} = \dfrac{١}{\text{٦س}} \cdot \text{ءع}$

يصبح المقدار $\int \text{ع}^{٦} \cdot \text{س} \times \dfrac{١}{\text{٦س}} \cdot \text{ءع}$

$$= \frac{١}{٦} \int \text{ع}^{٦} \cdot \text{ءع} = \frac{١}{٦} \times \frac{\text{ع}^{٧}}{٧} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٤٢} (\text{٣س}^{٢} + ٥)^{٧} + \text{ث}$$

نتيجة:

$$\int (\text{هـ(س)})^{\text{ن}} \cdot \text{هـ}'\text{(س)} \, \text{ءس} = \frac{(\text{هـ(س)})^{\text{ن}+١}}{\text{ن} + ١} + \text{ث}$$

أوجد: $\int \dfrac{(\text{٤س} - ٦)}{(\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٥)^{٢}} \text{ءس}$ باستخدام التعويض واستخدام النتيجة.

الحل:

❖ بالتعويض :

افرض أن : $\text{ك} = \text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٥ \Longleftarrow \dfrac{\text{ءك}}{\text{ءس}} = \text{٢س} - ٣$

$$\therefore \text{ءس} = \frac{\text{ء ك}}{(\text{٢س} - ٣)}$$

$$\therefore \int \frac{٢(\text{٢س} - ٣)}{(\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٥)^{٢}} \text{ءس} = \int \frac{٢\cancel{(\text{٢س} - ٣)} \times \text{ءك}}{\text{ك}^{٢} \cancel{(\text{٢س} - ٣)}}$$

$$= \int ٢\text{ك}^{-٢} \text{ءك} = \frac{-٢}{\text{ك}} + \text{ث} = \frac{-٢}{(\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٥)} + \text{ث}$$

❖ باستخدام النتيجة :

$$\int ٢(\text{٢س} - ٣)(\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٥)^{-٢} \text{ءس} = \frac{٢(\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٥)^{-١}}{-١} + \text{ث}$$

$$= \frac{-٢}{(\text{س}^{٢} - \text{٣س} + ٥)} + \text{ث}$$

أوجد:

أ) $\int \text{س}^{٣} \sqrt{\text{س}^{٤} + ١} \, \text{ءس}$

ب) $\int ٢\text{ك} \, (\text{٢ك س} + \text{ب})^{\text{٢ن}} \cdot \text{ءس}$.

الحل:-

أ) نفرض أن : $\text{ص} = \text{س}^{٤} + ١$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٤س}^{٣} \Longleftarrow \text{ءس} = \frac{\text{ءص}}{\text{٤س}^{٣}}$$

$$\therefore \int \text{س}^{٣} (\text{س}^{٤} + ١)^{\frac{١}{٢}} \text{ءس} = \int \cancel{\text{س}^{٣}} \times \text{ص}^{\frac{١}{٢}} \times \frac{\text{ءص}}{٤\cancel{\text{س}^{٣}}}$$

$$= \frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٣} \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٦} \text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٦} (\text{س}^{٤} + ١)^{\frac{٣}{٢}} + \text{ث}$$

ب) يترك للطالب .

أوجد ١) $\int (س+٥) . \sqrt{س+٢} . ءس$

٢) $\int (٢٥ - ٢٠س + ٤س^٢)^{\frac{٥}{٢}} . ءس$

٣) $\int \frac{ءس}{\sqrt{س+١} + \sqrt{س}}$

الحل :

١) $\int ((س+٢)+٣)(س+٢)^{\frac{١}{٢}} . ءس$

$= \frac{٢}{٥}(س+٢)^{\frac{٥}{٢}} + ٢(س+٢)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٢) $\int (٢س-٥)^{٥} . ءس = \frac{١}{١٢}(٢س-٥)^{٦} + ث$

٣) بالضرب في المرافق .

$\int \frac{١}{\sqrt{س+١}+\sqrt{س}} \times \frac{\sqrt{س+١}-\sqrt{س}}{\sqrt{س+١}-\sqrt{س}} . ءس$

$= \int \sqrt{س+١} - \sqrt{س} . ءس = \int (س+١)^{\frac{١}{٢}} - س^{\frac{١}{٢}} . ءس$

$= \frac{٢}{٣}(س+١)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٢}{٣}س^{\frac{٣}{٢}} + ث$

أوجد $\int (٣س^٢ + ٤س)(س^٣+٢س^٢)^٢ . ءس$

أوجد تكامل الدوال الآتية :

أ) $د(س) = ٣س(س^٢ - ٦)^{١٢}$ ب) $ق(س) = \frac{٥س^٢}{(س^٣-٢)^{٨}}$

الحل :

أ) نلاحظ أن مشتقة ما داخل القوس = ٢س

يمكن كتابة المقدار :

$\frac{٣}{٢}\int ٢س(س^٢-٦)^{١٢} ءس = \frac{٣}{٢} \times \frac{(س^٢-٦)^{١٣}}{١٣} + ث$

ب) $\int \frac{٥س^٢}{(س^٣-٢)^{٨}} ءس = \frac{٥}{٣}\int ٣س^٢ (س^٣-٢)^{-٨} ءس$

$= \frac{٥}{٣} \times \frac{(س^٣-٢)^{-٧}}{-٧} + ث$

$= \frac{-٥}{٢١}(س^٣-٢)^{-٧} + ث$.

أوجد $\int (\frac{١}{٣}س - ٢)^{٣٥} . ءس$

$\int (\frac{١}{٣}س-٢)^{٣٥} ءس = \frac{٣}{١}\int \frac{١}{٣}(\frac{١}{٣}س-٢)^{٣٥} ءس$

$= \frac{٣(\frac{١}{٣}س-٢)^{٣٦}}{٣٦} + ث$

أوجد $\int \frac{٤س^٣ - ٩س^٢}{٢\sqrt{س} - ٣} ءس$

الحل :

$\int \frac{س^٢(٤س-٩)}{٢\sqrt{س}-٣} ءس =$

$\int \frac{س^٢\cancel{(٢\sqrt{س}-٣)}(٢\sqrt{س}+٣)}{\cancel{(٢\sqrt{س}-٣)}} ءس$

$= \int (٢س^{\frac{٥}{٢}} + ٣س^٢) ءس$

$= \frac{٤}{٧}س^{\frac{٧}{٢}} + س^٣ + ث$

أوجد التكاملات التالية :

١ $\int (س+١)^٢ . ءس$

٢ $\int (١-٣س)^٤ . ءس$

٣ $\int (٤س-٦)^٥ . ءس$

١) $\int (س+١)^٢ ءس = \frac{(س+١)^٣}{٣} + ث$

٢) $\int (١-٣س)^٤ ءس = \frac{١}{-٣} \frac{(١-٣س)^٥}{٥} + ث$

$= \frac{-١}{١٥}(١-٣س)^٥ + ث$

٣) $\int (٤س-٦)^٥ ءس = \frac{١}{٤\times٦}(٤س-٦)^٦ + ث$

$= \frac{١}{٢٤}(٤س-٦)^٦ + ث$.

٥ $\int ٣س^٢(س^٣-٧)^٥ . ءس$

٦ $\int ٦س\sqrt{٢س^٢+٥} . ءس$

٥) $\int ٣س^٢(س^٣-٧)^٥ ءس = \frac{١}{٦}(س^٣+٧)^٦ + ث$

٦) $\int ٦س(٣س^٢+٥)^{\frac{١}{٢}} ءس = \frac{٢}{٣}(٣س^٢+٥)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

التكامل بالأجزاء

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين بالصورة ق(س) . هـَ(س) .

افرض أن :

$\text{د(س)} = \text{ق(س)} \cdot \text{هـ(س)}$

$\therefore \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{ق(س)} \cdot \text{هـ(س)}\right) = \text{ق(س)} \cdot \text{هـَ(س)} + \text{هـ(س)} \cdot \text{قَ(س)}$.

$\int \frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left(\text{ق(س)} \cdot \text{هـ(س)}\right)\text{ءس} = \int \text{ق(س)} \cdot \text{هـَ(س)}\,\text{ءس} + \int \text{هـَ(س)} \cdot \text{ق(س)}\,\text{ءس}$.

$\text{ق(س)} \cdot \text{هـ(س)} + \text{ث} = \int \text{ق(س)} \cdot \text{هـَ(س)}\,\text{ءس} + \int \text{هـَ(س)} \cdot \text{ق(س)} \cdot \text{ءس}$.

$\therefore \int \text{ق(س)} \cdot \text{هـَ(س)} \cdot \text{ءس} = \text{ق(س)} \cdot \text{هـ(س)} - \int \text{قَ(س)} \cdot \text{هـ(س)} \cdot \text{ءس} + \text{ث}$

❖إيجاد التكامل باستخدام التكامل بالأجزاء .

يجد الطلاب عادة صعوبة في البداية باستخدام التكامل بالأجزاء ، وتكمن الصعوبة في اختيار الدالة التي يشتقها وتلك التي يجرى لها التكامل، يفضل أن تعطى تدريبات في البداية لعمليات الاختيار فقط. ويجب أن يدرك الطالب أن التي يتم اختيارها للاشتقاق هي التي يمكن أن يتلاشى المتغير فيها إذا تم اشتقاقها مرة أو أكثر.

لهذا فإن الدوال التي أسها سالب لا تكون الدالة الأولى.

استخدم التكامل بالأجزاء في إثبات :

$\int \text{س}^{\text{ن}} \cdot \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$.

$\text{الطرف الإيمن} = \int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس}$

$= \int \text{س} \cdot \text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{ءس}$

$\text{نفرض أن : ق} = \text{س} \longrightarrow \text{ءق} = ١$

$\text{ء هـ} = \text{س}^{\text{ن}-١} \Longleftarrow \text{هـ} = \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}}$

$\therefore \int \text{س} \cdot \text{س}^{\text{ن}-١}\,\text{ءس} = \text{ق} \cdot \text{هـ} - \int \text{هـ}\,\text{ءق}$

$= \text{س} \times \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}} - \int \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}} \times ١\,\text{ءس}$

$\therefore \text{ن} \int \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}} + \int \frac{\text{س}^{\text{ن}}}{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}}$

$\therefore \int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس}\left(١ + \frac{١}{\text{ن}}\right) = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}}$

$\therefore \int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس}\left(\frac{\text{ن}+١}{\cancel{\text{ن}}}\right) = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\cancel{\text{ن}}}$

$\therefore \int \text{س}^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{ث}$

= الطرف الايسر

أوجد $\int ٥\text{س}\sqrt{\text{س}+٣} \cdot \text{ءس}$

الحل:-

نفرض أن :

$\text{ق} = ٥\,\text{س} \Longleftarrow \text{ءق} = ٥$

$\text{ءهـ} = (\text{س}+٣)^{\frac{١}{٢}} \Longleftarrow \text{هـ} = \frac{٢}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}}$

$\therefore \int ٥\text{س}\sqrt{\text{س}+٣} \cdot \text{ءس}$

$= ٥\text{س} \times \frac{٢}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}} - \int \frac{١٠}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}}\,\text{ءس}$

$= \frac{١٠}{٣}\text{س}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{١٠}{٣} \times \frac{٢}{٥}(\text{س}+٣)^{\frac{٥}{٢}} + \text{ث}$

$= \frac{١٠}{٣}\text{س}(\text{س}+٣)^{\frac{٣}{٢}} - \frac{٤}{٣}(\text{س}+٣)^{\frac{٥}{٢}} + \text{ث}$

❖ ويمكن حله بطريقة التكامل بالتعويض .

٤ $\int \text{س}^٢(٢-\text{س})^٣ \cdot \text{ءس}$

٤) نفرض أن : $\text{ق} = \text{س}^٢ \Longleftarrow \text{ءق} = ٢\text{س}$

$\text{ءهـ} = (٢-\text{س})^٣ \Longleftarrow \text{هـ} = \frac{١}{-٤}(٢-\text{س})^٤$

$\because \int \text{ق}\,\text{ءهـ} = \text{ق} \cdot \text{هـ} - \int \text{هـ} \cdot \text{ءق}$

$\therefore \int \text{ق}\,\text{ءهـ} = -\frac{\text{س}^٢}{٤}(٢-\text{س})^٤$

$+ \int \frac{\text{س}}{٢}(٢-\text{س})^٤ \cdot \text{ءس}$ (١)

$\text{نفرض أن ق} = \frac{١}{٢}\text{س} \Longleftarrow \text{ق} = \frac{١}{٢}$

$\text{ءهـ} = (٢-\text{س})^٤ \Longleftarrow \text{هـ} = \frac{-١}{٥}(٢-\text{س})^٥$

$\therefore \int \frac{\text{س}}{٢}(٢-\text{س})^٤\,\text{ءس} =$

$-\frac{١}{١٠}\text{س}(٢-\text{س})^٥ - \int -\frac{١}{١٠}(٢-\text{س})^٥\,\text{ءس}$

$= -\frac{١}{١٠}\text{س}(٢-\text{س})^٥ - \frac{١}{١٠} \times \frac{(٢-\text{س})^٦}{٦} + \text{ث}$

$= -\frac{١}{١٠}\text{س}(٢-\text{س})^٥ - \frac{١}{٦٠}(٢-\text{س})^٦ + \text{ث}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) :-

$\therefore \int \text{س}^٢(٢-\text{س})^٣\,\text{ءس} = -\frac{١}{٤}\text{س}^٢(٢-\text{س})^٤$

$-\frac{١}{١٠}\text{س}(٢-\text{س})^٥ - \frac{١}{٦٠}(٢-\text{س})^٦ + \text{ث}$

٨ $\int س(س+١)^{٥} \, ءس$

٩ $\int \frac{(س-١)^{٢}}{٢س^{٤}} \, ءس$

١٠ $\int \sqrt{س^{٢}-٢س^{٤}} \, ءس$

١١ $\int \sqrt[٣]{س^{٥}-س^{٣}} \, ءس$

١٢ $\int \frac{(س+١)^{٧}}{س^{٩}} \, ءس$

٨) نفرض أن : ص = س+١ $\Leftarrow \boxed{س = ص - ١}$

$\frac{ءص}{ءس} = ١ \Leftarrow \boxed{ءس = ءص}$

$\therefore \int س(س+١)^{٥} ءس = \int (ص-١)ص^{٥} ءص$

$= \frac{ص^{٧}}{٧} - \frac{ص^{٦}}{٦} + ث$

$= \frac{١}{٧}(س+١)^{٧} - \frac{١}{٦}(س+١)^{٦} + ث$

٩) $\int \frac{(س^{٢}-٢س+١)}{٢س^{٤}} ءس = \int \left(\frac{س^{-٢}}{٢} - س^{-٣} + \frac{١}{٢}س^{-٤}\right) ءس$

$= -\frac{س^{-١}}{٢} - \frac{س^{-٢}}{-٢} + \frac{س^{-٣}}{-٦} + ث$

$= \frac{-١}{٢س} + \frac{١}{٢س^{٢}} - \frac{١}{٦س^{٣}} + ث$

١٠) $\int \sqrt{س^{٢}-٢س^{٤}} ءس = \int س\sqrt{١-٢س^{٢}} ءس$

$= \frac{-١}{٤}\int -٤س\sqrt{١-٢س^{٢}} ءس$

$= \frac{-١}{٤} \times \frac{٢}{٣}(١-٢س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + ث = \frac{-١}{٦}(١-٢س^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + ث$

١١) $\int \sqrt[٣]{س^{٥}-س^{٣}} ءس = \frac{١}{٢}\int ٢س\sqrt[٣]{س^{٢}-١} ءس$

$= \frac{٣}{٨}(س^{٢}-١)^{\frac{٤}{٣}} + ث$

١٢) $\int س^{-٢}(١+س^{-١})^{٧} ءس = -\int -س^{-٢}(١+س^{-١})^{٧} ءس$

$= \frac{-١}{٨}(١+س^{-١})^{٨} + ث$

١ أوجد التكاملات لكل من الدوال التالية:

أ) $\int \frac{س}{\sqrt{٢س^{٢}+١}} \cdot ءس$

ب) $\int \sqrt{(٤س^{٢}+٣)^{٢}} \cdot ءس$

التمارين (٢-٦) أوجد قيمة ك التي تجعل العبارة صحيحة في كل مما يلي:

٢ $\int س^{-٥} \cdot ءس = ك\, س^{-٤} + ث$

٣ $\int (٥س-٧)^{٢} \cdot ءس = ك\,(٥س-٧)^{٣} + ث$

٤ $\int (س+١)^{\frac{١}{٢}} \cdot ءس = ك\,(س+١)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

٥ $\int \frac{٧}{\sqrt{(٨-س)^{٣}}} \cdot ءس = \frac{ك}{\sqrt{(٨-س)}} + ث$

٦ $\int \frac{٣}{\sqrt{ن}} \cdot ءن = ك\sqrt{ن} + ث$

١) أ) $\int س(٢س^{٢}+١)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= \frac{١}{٤}\int ٤س(٢س^{٢}+١)^{-\frac{١}{٢}} ءس$

$= \frac{١}{٢}(٢س^{٢}+١)^{\frac{١}{٢}} + ث$

ب) $\int \sqrt{(٤س^{٢}-٣)^{٢}} ءس$

$= \int |(٤س^{٢}-٣)| \, ءس$

$\because |٤س^{٢}-٣| = \begin{cases} ٤س^{٢}-٣ \text{ ، } س > \frac{\sqrt{٣}}{٢} \\ ٣-٤س^{٢} \text{ ، } -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \leq س \leq \frac{\sqrt{٣}}{٢} \\ ٤س^{٢}-٣ \text{ ، } س < -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \end{cases}$

$\therefore \int |(٤س-٣)^{٢}| \, ءس$

$= \begin{cases} \frac{٤}{٣}س^{٣}-٣س+ث \text{ ، } س > \frac{\sqrt{٣}}{٢} \\ ٣س-\frac{٤}{٣}س^{٣}+ث \text{ ، } -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \leq س \leq \frac{\sqrt{٣}}{٢} \\ \frac{٤}{٣}س^{٣}-٣س+ث \text{ ، } س < -\frac{\sqrt{٣}}{٢} \end{cases}$

٢) $-\frac{١}{٤}$　　٣) $\frac{١}{١٥}$

٤) $\frac{٥٣}{٣}$　　٥) ١٤

٦) ٦